数理解析研究所講究録
第768巻 1991年 142-145

$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ のもうひとつの随伴表現の分解について

有木 進

東京商船大学

$U_q(\mathfrak{sl}_2)$

$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の定義. カルタン部分群の大きさの違いにより以下のように3通りの $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ を定義する。

定義. $K=\mathbb{Q}(q)$ を一変数有理関数体とし、$U_q^{(l)}$を以下の生成元と基本関係で定義された K 上の単位的結合環とする。

生成元は $e,f,k^{\frac{1}{2}}$ と $k^{-\frac{1}{2}}$, 基本関係は

$$k^{\frac{1}{2}}ek^{-\frac{1}{2}}=qe,\quad k^{\frac{1}{2}}fk^{-\frac{1}{2}}=q^{-1}f$$

$$k^{\frac{1}{2}}k^{-\frac{1}{2}}=k^{-\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}=1,\quad ef-fe=\frac{k^2-k^{-2}}{q^2-q^{-2}}$$

定義. $U_q^{(m)}$を e,f,k と k^{-1} で生成される $U_q^{(l)}$の部分環とし、$U_q^{(s)}$を $ek,k^{-1}f,k^2$ と k^{-2} で生成される $U_q^{(m)}$の部分環とする。

$C=fe+\frac{q^2k^2+q^{-2}k^{-2}}{(q^2-q^{-2})^2}$ はカシミール元とよばれる。

随伴表現. 上で定義したランク1の量子群はそのホップ代数構造から定義されるいくつかの随伴表現を持つ。これらは K 上の表現として一般には同値ではないが、ランク1の場合には同値である。そこで今回の報告では以下で述べる随伴表現を用いて直既約分解を説明する。

定義. $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の随伴表現を以下の生成元の作用で一意に決まるものとする。

$$\begin{aligned} Ad(e)x &= exk^{-1} - q^2k^{-1}xe \\ Ad(f)x &= fxk^{-1} - q^2k^{-1}xf \qquad (x\in U_q^{(l)}) \\ Ad(k^{\frac{1}{2}})x &= k^{\frac{1}{2}}xk^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

いくつかの準備

$Ad(k^{\frac{1}{2}})$ と $Ad(C)$ の同時固有ベクトル.

補題１．$\overline{K}$ を K の代数閉包とする。$Ad(k^{\frac{1}{2}})$ と $Ad(C)$ の$U_q^{(l)} \otimes \overline{K}$ 中の同時固有ベクトルは次のどれかの形である。

(1) $k^{m+2n}e^m(1+\sum_{j=1}^{n-1} a_j^{(m)}(C)k^{m+2n-2j})(n=1,2,...)$
(ここで、$a_j^{(m)}(X)$ は次数 j 以下の多項式)
(2) $k^m e^m$
(3) $k^{m+2n}f^m(1+\sum_{j=1}^{n-1} a_j^{(m)}(C)k^{m+2n-2j})(n=1,2,...)$
(4) $k^m f^m$
$(m=0,1,2,...)$

この補題よりつぎの補題２がしたがう。

補題２．

(1) q の負べきを最高ウエイトにもつ最高ウエイトベクトルは存在しない。
(2) q の正べきを最低ウエイトにもつ最低ウエイトベクトルは存在しない。
(3) V を $U_q^{(l)}$の部分加群とする。このとき $V \neq 0$ となるのは $V^0 := V \cap K[k^{\frac{1}{2}}, k^{-\frac{1}{2}}, C] \neq 0$ となるときに限る。
(4) $\{V_\alpha\}$ を $U_q^{(l)}$の部分加群の族とする。このとき$\sum V_\alpha = \oplus V_\alpha$ は $\sum V_\alpha^0 = \oplus V_\alpha^0$ と同値である。

いくつかの部分加群の定義.

定義.

(1) $V_{half} = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} K[C]k^{n+\frac{1}{2}}e^m + K[C]k^{n+\frac{1}{2}}f^m$
(2) $V_{odd} = \sum_{n+m=\mathrm{odd};n,m\in\mathbb{Z}} K[C]k^n e^m + K[C]k^n f^m$
(3) $V_{even} = \sum_{n+m=\mathrm{even};n,m\in\mathbb{Z}} K[C]k^n e^m + K[C]k^n f^m$

定義.

(1) $V_{n+\frac{1}{2}} = Ad(U_q^{(l)})k^{n+\frac{1}{2}} \quad (n\in\mathbb{Z})$
(2) $V_{2n+1} = Ad(U_q^{(l)})k^{2n+1} \quad (n\in\mathbb{Z})$
(3) $V_{2n} = Ad(U_q^{(l)})C^{-n}k^{-2} \quad (n\in\mathbb{Z}_{<0})$
(4) $V_{2n} = Ad(U_q^{(l)})k^{n-2}e^n + Ad(U_q^{(l)})k^{n-2}f^n \quad (n\in\mathbb{Z}_{>0})$

命題３．

(1) $U_q^{(l)} = V_{half} \oplus V_{odd} \oplus V_{even}$
(2) $U_q^{(m)} = V_{odd} \oplus V_{even}$
(3) $U_q^{(s)} = V_{even}$

既約加群であることの証明．つぎの補題は V_n が $U_q^{(*)}$ -加群 $(*=l,m,s)$ として既約であることを示すためのものである。ただし、V_{2n} $(n\in\mathbb{Z}_{>0})$

に対しては $Ad(f)^n(k^{n-2}e^n)$ が定数倍をのぞいて $Ad(e)^n(k^{n-2}f^n)$ と一致する事実も用いる。
証明は n に関する帰納法による。

補題4. V を $U_q^{(l)}$ の部分加群とする。このとき、V^0 が $K[Ad(C)]$-加群として一元生成で $Ad(C)$-固有ベクトルをもたなければ、V は既約である。

命題5. V_n は全て既約加群である。

結論

随伴表現の直既約分解をあたえるには次の定理を示せば十分である。

定理.

$$V_{half} = \oplus_{n\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}} V_n$$
$$V_{odd} = \oplus_{\mathrm{n=odd}} V_n$$
$$V_{even} = (\oplus_{\mathrm{n=even}} V_n) \oplus V_{soc}$$
$$(\text{ここで、}\ V_{soc} = \oplus K[C]Ad(U_q^{(l)})k^n e^n)$$

これらの直和因子の加群構造は以下の通り。$X(n) = U_q^{(l)}/U_q^{(l)}(k^{\frac{1}{2}} - q^n)$ とおく。これは自然に左加群とみなせる。すると V_{2n}(n=1,2,...) は $X(n)$ と $X(-n)$ の融合和であり、他の直和因子は全て $X(0)$ と同値な表現である。さらに、V_{2n} (n=0,1,2,...) は互いに非同値である。

V_{half} と V_{odd}. $Ad(e)(k^n e^m)$ と $Ad(f)(k^n f^m)$ を直接計算することにより、$V_{half} = Ad(U_q^{(l)})(V_{half})^0$ と $V_{odd} = Ad(U_q^{(l)})(V_{odd})^0$ が示せる。故に $(V_{half})^0$ と $(V_{odd})^0$ の $K[Ad(C)]$-加群としての直既約分解がわかれば十分である。

p に関する帰納法により、$C^p k^{2n+1}$ が上記定理第二式右辺の加群に含まれていることが示せる。故に、$(V_{odd})^0 = \sum_{n=\mathrm{odd}} V_n^0$ であるから直和であることを示すには、$F_n = \sum_{j\leq i+n} KC^i k^{2j+1}$ で定義される $K[Ad(C)]$-加群のフィルトレーションを用いて $V_{2n+1}^0 \cong F_n/F_{n-1}$ であることをみればよい。V_{half} にたいしても証明は同様である。

V_{even}. V_{even} にたいしては証明は2段階に分かれる。(第1段) $(V_{even})^0 = (V_{soc})^0 \oplus (\oplus V_{2n}^0)$ であることをみる。それには以下の補題をみればよい。

補題6. $V^- = \sum_{j\leq 0} K[C]k^{2j}$, $V^+ = \sum_{j>0} K[C]k^{2j}$ とすると、

(1) $V^+ = \oplus_{p,n\geq 0} KC^p Ad(f)^n(k^n e^n)$
(2) $V^- = (\oplus_{n\leq 0} K[Ad(C)]C^{-n}k^{-2}) \oplus (\oplus_{n>0} K[Ad(C)]k^{-2n-2})$
(3) $V^+ \oplus (\oplus_{j\leq 0} C^{-j}k^{-2}) \oplus (\oplus_{0<j<n} K[Ad(C)]k^{-2j-2})$ を法として、$Ad(f)^n(k^{n-2}e^n)$ は、k^{-2n-2} に定数倍をのぞいて一致する。

(第2段) $V_{soc}+\sum V_{2n}$ が V_{even} と一致することをみる。$k^n e^m$ は $m \neq n$ である限り $Ad(e)$ の像に属し、$k^n f^m$ も $m \neq n$ である限り、$Ad(f)$ の像に属するので、以下を示せば十分である。

補題7.

(1) $ImAd(e)$ を法として、$Ad(f)^j(k^{n+j-2}e^{n+j}) \equiv f_{j,n}(C)k^{n-2}e^n$ と書ける。ここで、$f_{j,n}(X)$ は次数 j の多項式。

(2) $ImAd(f)$ を法として、$Ad(e)^j(k^{n+j-2}f^{n+j}) \equiv f_{j,n}(C)k^{n-2}f^n$

REFERENCES

1. M.Jimbo, *A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation*, Lett. in Math.Phys. **10** (1985), 63–69.
2. G.Lusztig, *Quantum deformations of certain simple modules over enveloping algebras*, Adv.in Math. **70** (1988), 237–249.